

In the name of Allah, the Most Gracious, the Most Merciful



Copyright disclaimer

"La faculté" is a website that collects medical documents written by Algerian assistant professors, professors or any other health practicals and teachers from the same field.

Some articles are subject to the author's copyrights.

Our team does not own copyrights for some content we publish.

"La faculté" team tries to get a permission to publish any content; however , we are not able to contact all authors.

If you are the author or copyrights owner of any kind of content on our website, please contact us on: facadm16@gmail.com to settle the situation.

All users must know that "La faculté" team cannot be responsible anyway of any violation of the authors' copyrights.

Any lucrative use without permission of the copyrights' owner may expose the user to legal follow-up.



LOIS USUELLES

LOIS DISCRETES

LOI UNIFORME

DEFINITION

- X est une loi uniforme sur son ensemble E fini $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- X suite une loi uniforme $\Leftrightarrow P(X = x_i) = \frac{1}{|E|} \forall x_i \in E$

CAS PARTICULIER :

- X suit une loi uniforme sur son ensemble fini $E = \{1, 2, \dots, n\} \Leftrightarrow P(X = k) = \frac{1}{n} \forall k = \overline{1, n}$.

ESPERANCE

- $E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k$
- $E(X) = n + \frac{1}{2}$

VARIANCE

- $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$
- $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

LOI DE BERNOULLI

MODELISATION

- Soit $E \Rightarrow \Omega = \{S, E\} \Rightarrow S = \text{succès}, E = \text{échec}$.
- On pose $\mathcal{K} = \begin{cases} 1 & \text{si } S \\ 0 & \text{si } E \end{cases}; S \cap E = \emptyset; P(S) + P(E) = 1$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ binôme de Newton $= (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

DEFINITION

- $X \sim B(p)$ sachant que $0 < p < 1 \Leftrightarrow$
- $\begin{cases} \mathcal{K} = \{0, 1\} \\ P(X = 1) = P(S) = p \\ P(X = 0) = P(E) = 1 - p \end{cases}$

ESPERANCE ET VARIANCE

- $E(X) = p ; V(X) = p \times q$

LOI BINOMIALE

MODELISATION

- Soit E une épreuve de Bernoulli. On répète E de façon indépendante n fois, c-à-d, $p = P(S)$ reste inchangée au cours des n répétitions : donc tirages successifs avec remise ou grande population.

DEFINITION

- $X \sim B(n, p) \ 0 < p < 1 \Leftrightarrow P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$

PROBABILITES

- On vérifie que c'est bien une loi de probabilités $\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{K}} P(X = k) = 1$
- $\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = [p + (1 - p)]^n = 1$

PROPOSITION

- Soit $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ iid
- $X_i \sim B(p) \ \forall i = 1, \dots, n$
- X_i indep. $\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$

EXEMPLE

$n = 4, E = \text{lancer 1 pièce 4 fois}, S = \text{face}$

1ère fois: $E_1 \rightarrow \text{face} = S; X_1 = 1$

2ème fois: $E_1 \rightarrow \text{pile} = S; X_1 = 0$

3ème fois: $E_1 \rightarrow \text{pile} = S; X_1 = 0$

4ème fois: $E_1 \rightarrow \text{face} = S; X_1 = 1$

ESPERANCE ET VARIANCE

- On sait que $X = \sum_{i=1}^n X_i ; X_i \sim B(p)$
- $X \sim B(n, p) \Rightarrow E(X_i) = np ; V(X_i) = npq$

LOI HYPERGEOMETRIQUE

MODELISATION

- Expérience de Bernoulli répétée n fois possibles et non indépendantes donc tirages sans remise.
- X nombre de succès obtenus

DEFINITION

- $X \sim H(N, n, p)$
- N : taille de la pop
n : taille de l'éch
p : P(S)
- $P(X = k) = \frac{C_{Np}^k C_{N(n-k)}^{n-k}}{C_N^n}$

LOI DE POISSON

DEFINITION

- $X \sim P(\lambda) ; \lambda > 0 \Leftrightarrow$
- $\begin{cases} \mathcal{X} = \mathbb{N} \\ P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \end{cases}$

MODELISATION

- La loi de poisson est souvent liée en temps
Ex : le nombre d'appels reçus à un service d'urgence en 22h et 22h30
- Ou encore à une capacité
Ex : Nb de bactéries dans un volume d'eau

ESPERANCE ET VARIANCE

- $X \sim P(\lambda) \Leftrightarrow E(X) = V(X) = \lambda$

PROPOSITION

- La moyenne est proportionnelle au temps

RELATION DE RECURRENCE

- $P(X = 0) = e^{-\lambda}$
- $P(X = k + 1) = \frac{\lambda}{k+1} [P(x = k)] \forall k \geq 0$

DEMONSTRATION

- $P(x = k + 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$
- $$P(x = k + 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k \times \lambda}{k! \times (k + 1)}$$
- $$P(X = k + 1) = \frac{\lambda}{k + 1} [P(x = k)]$$

APPROXIMATION DE LA BINOMIALE PAR LA POISSON

- La loi de Poisson régit les phénomènes rares comme les maladies génétiques

EXEMPLE

- $X = n$ enfants ayant une certaine maladie rare sur n enfants examinés.
- $X \sim B(n, p)$
- On montre que si $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ cette Binomiale est approximée par une $P(\lambda)$ où $\lambda = np$

DANS LA PRATIQUE

- $B(n, p) \approx P(\lambda) \begin{cases} n \rightarrow +\infty \approx n \geq 50 \\ P \leq 10\% \\ np \leq 10 \end{cases}$